



**La mappa del navigante iperbolico**

Lavoro di gruppo

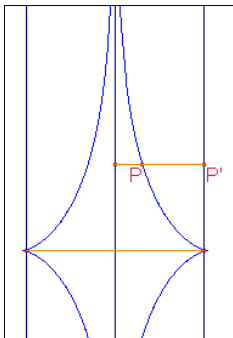
**Occorrente:** modelli in legno di pseudosfera – profilo in cartone della pseudosfera – curvimetro – due fogli di carta piuttosto grandi – riga – squadra – righello morbido da sarto – nastro adesivo di carta – forbici – pennarelli – calcolatrice scientifica

Così come abbiamo fatto per la sfera, vogliamo costruire una carta geografica che risolva il problema del navigante che si trova sulla superficie di una pseudosfera: la carta deve essere tale che se si sceglie una rotta su di essa e si imposta al timone l'orientamento indicato dalla bussola, si può sperare di arrivare nel luogo voluto.

**La proiezione cilindrica**

Iniziamo con l'effettuare una proiezione cilindrica parallela.

Immaginate di avvolgere un cilindro attorno a una pseudosfera in modo da renderlo aderente alla “base”.



a) A lato è rappresentata una sezione di una pseudosfera; le due rette verticali sono le rette lungo le quali viene intersecato il cilindro; se da un punto dell'asse si conduce una perpendicolare all'asse, essa interseca la pseudosfera in un punto P e, successivamente, il cilindro in un punto P': il punto P' è la proiezione di P sul cilindro. A ogni punto della pseudosfera viene così a corrispondere un punto sulla superficie del cilindro.

b) Tutti i punti di uno stesso meridiano (cioè di una stessa trattrice), proiettati sul cilindro si disporranno lungo ..... e una sequenza di meridiani andrà a costruire .....

c) Ciascun parallelo, proiettato sul cilindro, si trasformerà in ..... e una sequenza di paralleli posti sulla pseudosfera a latitudini regolarmente distanziate andrà a formare .....

d) se alla fine si tagliasse il cilindro lungo un meridiano, e lo si aprisse, che cosa si otterrebbe?

**Costruiamo la carta a proiezione cilindrica**

Avete a disposizione una (semi)pseudosfera in cui sono visibili alcuni “meridiani” e alcuni “paralleli”.

**La proiezione dei meridiani**

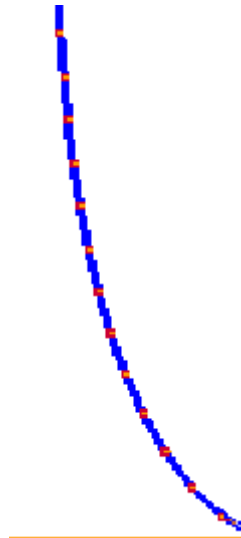
Adottiamo una scala di 1 a 1, dunque riportate su di un foglio (*un formato A3 disposto in verticale*) la proiezione dell'equatore, ovvero un segmento rettilineo lungo quanto la “base” della pseudosfera; suddividetelo in dieci parti uguali e tracciate dieci rette passanti per essi e perpendicolari all'equatore. Otterrete dieci rette “verticali” che costituiscono le proiezioni dei meridiani.

**La proiezione dei paralleli**

▪ Utilizzate il profilo della pseudosfera.

Segnate su di esso alcuni punti in corrispondenza dei paralleli sulla pseudosfera (vedi figura): partite dal punto corrispondente alla base della pseudosfera e indicatelo con 0

e proseguite segnando i paralleli 1, 2, 3, ... in modo che la lunghezza del cammino (lungo il profilo) da un punto all'altro sia di 1 cm.



- Appoggiate il profilo al foglio in modo che il suo asse sia parallelo ai meridiani e tracciate i paralleli in corrispondenza dei punti che avete segnato.

La carta a proiezione cilindrica è così pronta. Che cosa osservate?

Gli studenti ottengono qualcosa del genere:



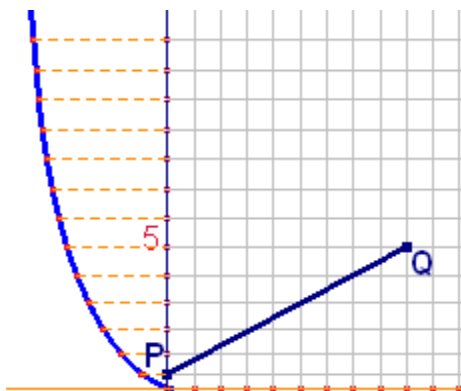
Che i paralleli sono più "fitti" verso "l'equatore"

.....  
.....

### La carta risolve il problema del navigante?

Questa parte può creare dei problemi operativi per i ragazzi. Se avete fatto l'analogo percorso sulla sfera, ci si può agganciare a quanto già visto e spiegare agli studenti che la proiezione cilindrica non basta per risolvere il problema del navigante perché un percorso diritto da un punto P a un punto Q sulla carta non corrisponde a una linea che va dal corrispondente di P a quello di Q sulla pseudosfera. In questo caso si può saltare questo paragrafo.

- Tracciate sulla carta una rotta tra un punto P e un punto Q.



- Rilevate l'angolo  $\alpha$  che la rotta forma con i meridiani
- Riproducete la rotta sulla pseudosfera:
  1. sulla pseudosfera fissate un meridiano che corrisponda all'asse y. L'asse x è la circonferenza di base.
  2. Segnate un punto le cui coordinate sono uguali a quelle di P (se avete scelto il punto sull'asse y, dovete solo individuarne la quota utilizzando il profilo della pseudosfera e riportando la misura della y di P)
  3. utilizzate il profilo della pseudosfera e un nastrino e fatelo aderire alla pseudosfera in modo da formare col primo meridiano (l'asse y della pseudosfera) un angolo  $\alpha$
  4. determinate il punto di incontro tra il nastrino e il successivo meridiano
  5. ripetete le due operazioni precedenti altre volte fino a trovare il punto sul meridiano di Q
- Sulla pseudosfera arrivate nel punto che ha le stesse coordinate di Q? .....
- Il problema del navigante è risolto? .....

### Costruiamo la carta conforme

Così come accade sulla sfera, anche sulla pseudosfera è necessario applicare un fattore di correzione ai meridiani per rendere conforme la mappa; per fare cioè in modo che essa conservi gli angoli sulla pseudosfera.

Per correggere l'ordinata occorre applicare un'esponenziale. Ecco la formula:

$$y = r \cdot e^{y_{ps}/r}$$

In questa formula indichiamo con r il raggio di base della pseudosfera, con e il numero di Nepero e con  $y_{ps}$  l'ordinata del punto prima della correzione (cioè la lunghezza del tratto di meridiano sulla pseudosfera).

Vediamo ora di farlo davvero e creiamo la mappa!

Misurate il raggio di base della pseudosfera;  $r = \dots\dots\dots 10\text{cm}$

Misurate la lunghezza della generatrice;  $l = \dots\dots\dots 27.5\text{ cm}$

Completate la tabella per calcolare le corrispondenti y.

$y_{ps}$ (cm)	y (cm) [ $y=r \cdot \exp(y_{ps}/r)$ ]
0	10
2	12.21
4	14.92
6	18.22
8	22.26
10	27.18
12	33.20

14	40.55
16	49.53
18	60.50

Sul foglio di carta riportate le misure delle  $y$  calcolate in precedenza e tirate delle rette orizzontali, i nuovi paralleli...

Pensate ora come mettere alla prova la bontà di questa carta (*sugg.: vedi la prova effettuata per la carta a proiezione cilindrica prima della correzione*)

- Descrivete le operazioni effettuate

*Tracciata una rotta rettilinea sulla carta, si misura l'angolo che essa forma con i meridiani (la direzione che si dovrebbe imporre alla bussola) . Si cerca sulla pseudosfera lo stesso punto di partenza e si procede con un tratto che formi esattamente quell'angolo con il meridiano, fino ad incontrare il meridiano successivo, rispetto al quale si rimisura lo stesso angolo, e così via fino a incontrare il meridiano del punto d'arrivo.*

- Quali risultati avete ottenuto? *Si dovrebbe intersecare l'ultimo meridiano alla stessa "latitudine" del punto d'arrivo sulla carta*
- Il percorso tracciato sulla pseudosfera è una geodetica? ...*NO, come si verifica con la solita strisciolina*

#### CHE COSA SO ORA

#### PAROLE CHIAVE